

Информационно-коммуникационные и химические технологии

МРНТИ 78.15.00; 78.01.21

<https://doi.org/10.58805/kazutb.v.1.18-69>**АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ****А.Т. Мазакова², Ш.А. Джомартова², Т.Ж. Мазаков^{1,2}, Г.З. Зиятбекова^{1,2},
А.Т. Досаналиева³**¹Институт информационных и вычислительных технологий КН МНВО РК, Алматы, Казахстан,²Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан,³Университет «Туран», г. Алматы, Казахстан,

jomartova@mail.ru

В статье исследована возможность автоматизированной линеаризации нелинейных моделей. На основе линеаризованных моделей можно исследовать в дальнейшем такие свойства исходной модели как устойчивость и управляемость. На основе применения компьютерной алгебры разработан конструктивный алгоритм линеаризации системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработано программное обеспечение на MatLab. Эффективность предложенного алгоритма продемонстрирована на прикладных задачах.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, компьютерная алгебра, устойчивость, управляемость, MatLab.

ҚАРАПАЙЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕРМЕН СИПАТТАЛАТЫН СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС МОДЕЛЬДІҢ СЫЗЫҚТЫҚ ПРОЦЕСІН АВТОМАТТАНДЫРУ**А.Т. Мазакова², Ш.А. Джомартова², Т.Ж. Мазаков^{1,2}, Г.З. Зиятбекова^{1,2},
А.Т. Досаналиева³**¹Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы, Қазақстан,²әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,³«Тұран» университеті, Алматы, Қазақстан,

jomartova@mail.ru

Мақалада сызықтық емес модельдерді автоматтандырылған сызықтық ету мүмкіндігі зерттелген. Сызықтық модельдер негізінде болашақта тұрақтылық пен басқару сияқты бастапқы модельдің қасиеттерін зерттеуге болады. Компьютерлік алгебраны қолдану негізінде сызықтық емес қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін сызықтандырудың конструктивті алгоритмі жасалды. MATLAB-та бағдарламалық жасақтама жасалды. Ұсынылған алгоритмнің тиімділігі қолданбалы есептерде көрсетілген.

Түйін сөздер: қарапайым дифференциалдық теңдеу, компьютерлік алгебра, тұрақтылық, басқару, MatLab.

AUTOMATION OF THE LINEARIZATION PROCESS OF A NONLINEAR MODEL DESCRIBED BY ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

**A.T. Mazakova², Sh.A. Jomartova², T.Zh. Mazakov^{1,2}, G.Z. Ziyatbekova^{1,2},
A.T. Dossanaliyeva³**

¹RSE Institute of Information and Computational Technologies MSHE RK CS, Almaty, Kazakhstan,

²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

³Turan University, Almaty, Kazakhstan,

jomartova@mail.ru

The paper investigates the possibility of automated linearization of nonlinear models. On the basis of linearized models it is possible to investigate further such properties of the initial model as stability and controllability. Based on the application of computer algebra, a constructive algorithm for linearizing a system of nonlinear ordinary differential equations is developed. The software in MatLab has been developed. The effectiveness of the proposed algorithm is demonstrated on applied problems.

Keywords: ordinary differential equation, computer algebra, stability, controllability, MatLab.

Введение. Исследование многих робототехнических, экономических систем приводит к построению математических моделей, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для нелинейных систем до настоящего времени не существует универсальных подходов. Изучение подобных математических моделей требует обязательного учета вида нелинейностей [1-4].

Материалы и методы. Постановка задачи. В общем виде нелинейная модель может быть представлена как система обыкновенных дифференциальных уравнений [5-6]:

$$\frac{dq}{dt} = f(q, \theta, t) + B(t)u \quad (1)$$

где θ – вектор параметров размерности 1, $q(t)$ – вектор переменных модели размерности n , $u(t)$ – входы модели, задающие способы управления, время $t \in [0, T]$. T – задано. Предполагается, что вектор-функция $f(q, \theta, t)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными по q .

К системе уравнений (1) добавляются начальные условия:

$$q(0) = q_0 \quad (2)$$

На управление даются ограничения

$$u(t) \in U = \{u(t): u_i(t) \in C[[0, T]; \\ -L_i \leq u_i(t) \leq L_i, i = (1, m), t \in [0, T]\} \quad (3)$$

При исследовании следующих свойств математической модели (1)-(3) как управляемость, устойчивость часто применяется метод линеаризации [7-11].

Нелинейной модели (1) соответствует линеаризованная система дифференциальных уравнений:

$$\dot{q} = A(\theta, t)q + B(t)u \quad (4)$$

$$q(0) = q_0 \quad (5)$$

где $A(\theta, t) - n * n$ – матрица элементы которой зависят от вектора параметров и времени $t \in [0, T]$.

Матрица $A(\theta, t)$ определяется из (1) следующим образом:

$$A(\theta, t) = \frac{\partial f(q^s, \theta, t)}{\partial q} \quad (6)$$

В (6) вектор-функция $q^s(t)$ (размерности n) $t \in [0, T]$, предполагается заданной исходя из требований к поставленной задаче.

Для задачи управляемости $q^s(t)$ может быть задана следующим образом:

$$q^s(t) = const = q_T, t \in [0, T] \quad (7)$$

где в качестве q_T задается желаемое конечное состояние системы (1).

Задача управляемости: существует ли управление $u(t)$, удовлетворяющее условию (3) и переводящее систему (4) из начального состояния (5) в желаемое конечное состояние (7) за заданное время T .

Определение [12]. Система (1) называется локально нуль-управляемой на отрезке $t \in [0, T]$, если существует δ окрестность точки q_T , такая что для любого вектора $q_0 \in R^n$: $\|q_0 - q_T\| < \delta$ найдется такое допустимое управление $u_0(t) \in U$, что существует решение (1) удовлетворяющее условиям

$$q(0) = q_0 \text{ и } q(T) = q_T$$

Для задачи устойчивости $q^s(t)$ может быть задана в виде (7), где в качестве q_T задается положение равновесия исходной системы (1), исследуемое на свойство ее устойчивости.

Рассмотрим следующую нелинейную систему

$$\frac{d_q}{d_t} = f(q), \quad (8)$$

где функция

$$f(q_T) \equiv 0, A = \frac{\partial f(q_T)}{\partial q}$$

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия q_T системы (8) http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/ode_unicode/m-44/m-44.html – eq1 экспоненциально устойчиво [13].

Построение вручную матрицы $A(\theta, t)$ вызывает большие трудности уже при размерности n больше 3. А в случае зависимости вектор-функции $f(q, \theta, t)$ от параметров θ при размерности n больше 3 практически невозможно.

Как было отмечено во введении процесс построения линеаризованной модели (4) для исходной нелинейной системы вида (1) достаточно трудоемкий и при размерности n больше 3 практически не реализуем. Также при построении линеаризованной модели присутствует «человеческий фактор», не гарантирующий правильность вычисления арифметических выражений. В этой связи задача автоматизации процесса линеаризации исходной нелинейной модели является актуальной.

Для построения линеаризованной модели (5) предлагается использование систем компьютерной алгебры. В предлагаемой работе использована система MatLab [14-16].

Появление в 20-м веке нового направления математической науки – компьютерной алгебры – позволило автоматизировать процесс получения уравнений математической модели динамических систем на основе систем аналитических вычислений (САВ) [17].

САВ сначала предоставляли основной набор процедур обработки алгебраических выражений: вычисление, подстановка, упрощение, дифференцирование. Затем на их основе были реализованы более сложные операции: разложение в ряды, канонизация

выражений, интегрирование в частных случаях. С разнообразными пакетами они применяются во многих областях – от решения задач небесной механики до теоретических исследований алгоритмов [18].

Дальнейшие исследования проведем на двух примерах.

Результаты и обсуждение. Исследования беспилотного летательного аппарата (БПЛА)

Во всем мире развивается беспилотная авиация из-за потребности в легких, относительно дешевых летательных аппаратах, обладающих высокими характеристиками маневренности и способных выполнять широкий круг задач. Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) успешно применяются в ходе военных операций по всему миру, и при этом они так же успешно выполняют задачи гражданского назначения.

Рассмотрим следующую математическую модель динамики БПЛА

$$\begin{cases} \dot{V} = g(n_{xa} - \sin\Theta) \\ \dot{\Theta} = g(n_{ya}\cos\gamma - \cos\Theta)/V \\ \dot{\Psi} = -gn_{ya}\sin\gamma/(V\cos\Theta) \\ \dot{x} = V\cos\Theta\cos\Psi \\ \dot{y} = V\sin\Theta \\ \dot{z} = -V\cos\Theta\sin\Psi \end{cases} \quad (9)$$

$$n_{xa} = \frac{P\cos\alpha - X_a}{mg}, n_{ya} = \frac{P\sin\alpha + Y_a}{mg} \quad (10)$$

Здесь x, y, z – координаты центра масс самолета в нормальной земной системе координат, V – скорость полета, Θ – угол наклона траектории, Ψ – угол курса, α – угол атаки, γ – угол крена, P – тяга двигателя, X_a – аэродинамическое сопротивление, Y_a – аэродинамическая подъемная сила, m – масса самолета, g – ускорение свободного падения, n_{xa} – продольная перегрузка и n_{ya} – поперечная перегрузка (в поточных осях координат).

В качестве управляющих переменных в (9) принимается перегрузки n_{xa} , n_{ya} и угол крена γ (10) [19].

Введем обозначения:

$$q = \begin{bmatrix} V \\ \Theta \\ \Psi \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, q_0 = \begin{bmatrix} V_0 \\ \Theta_0 \\ \Psi_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, q_1 = \begin{bmatrix} V_1 \\ \Theta_1 \\ \Psi_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

При введенных обозначениях систему уравнений (9)-(10) можно представить в виде (12):

$$\frac{dq}{dt} = f(q,t) + B(t)u \quad (12)$$

С помощью программы, написанной на MatLab и представленной ниже, получим следующие результаты линеаризации системы (9).

```
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x A B
x0 = [2 5 4 4 5 6];
x = [x1 x2 x3 x4 x5 x6];
t = [0 10]; y0 = x0;
g = 9.8; P = 2000; m = 3; alfa = 30; gamma = 45; Xa = 0.32; Ya = 0.4;
nxa = (P*cos(alfa) - Xa)/(m*g); nya = (P*sin(alfa) + Ya)/(m*g);
F = [g*(nxa-sin(x2)); g*(nya*cos(gamma)-cos(x2))/x1; -g*nya*sin(gamma)/(x1*cos(x2))];
```

```
x1*cos(x2)*cos(x3); x1*sin(x2); -x1*cos(x2)*sin(x3)];
for i=1:length(x0)
    for j=1:length(x0)
        A(i,j)=diff(F(i),x(j));
    end
end
end
B=subs(A,x,x0);
disp(vpa(A,3));
disp(vpa(B,3));
```

Представим результат выполнения программы в следующем виде:

$$A(x) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Выпишем только ненулевые элементы матрицы A(x):

$$\begin{aligned} a_{12} &= -9.80 * \cos(x2), & a_{21} &= -1.*(-346.-9.80 * \cos(x2))/x1^2, \\ a_{22} &= 9.80*\sin(x2)/x1 & a_{31} &= -560./x1^2/\cos(x2), \\ a_{41} &= \cos(x2)*\cos(x3), & a_{32} &= 60./x1/\cos(x2)^2*\sin(x2), \\ a_{42} &= x1*\sin(x2)*\cos(x3) & a_{43} &= -x1*\cos(x2) * \sin(x3), \\ a_{51} &= \sin(x2), & a_{52} &= x1 * \cos(x2), & a_{61} &= -\cos(x2) * \sin(x3), \\ a_{62} &= x1 * \sin(x2) * \sin(x3), & a_{63} &= -x1 * \cos(x2) * \cos(x3). \end{aligned}$$

Вычислим значение матрицы A(x) в точке $x_0 = [2 \ 5 \ 4 \ 4 \ 5 \ 6]$:

$$A(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -2.78 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 87.2 & -4.70 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -493. & -3330. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.186 & -1.25 & 0.430 & 0 & 0 & 0 \\ -0.959 & 0.568 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.215 & 1.45 & 0.372 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

В результате выполнения программы получен (13) аналитический вид матрицы A и ее значение в точке $x_0 = [2 \ 5 \ 4 \ 4 \ 5 \ 6]$.

В дальнейшем матрица A , представленная в виде (14), может быть использована для анализа устойчивости или управляемости модели БПЛА в заданной точке.

Исследования двухзвенного робота

Рассматривается математическая модель плоского двухзвенного шарнирного манипулятора, представленного на рисунке 1 [20].

При составлении уравнений движения учитывались следующие параметры системы: l_1 и l_2 – длины звеньев, l_{c_1} и l_{c_2} – координаты центров инерции, m_1 и m_2 – массы звеньев, m – масса схвата с грузом, J_{c_1} и J_{c_2} – моменты инерции звеньев относительно осей, проходящих через центры масс звеньев, J_1 и J_2 – моменты инерции роторов двигателей, приведенные к осям шарниров (считается, что первый двигатель установлен на основании, а полная масса второго

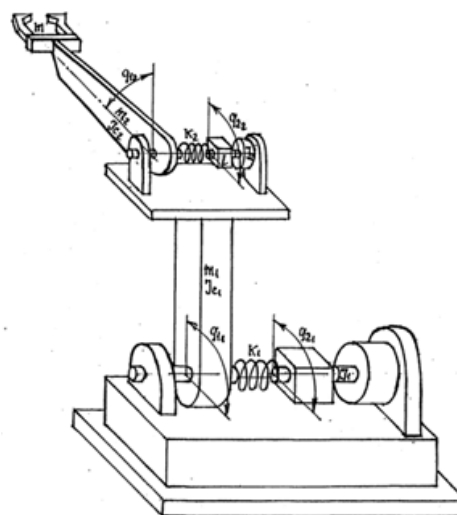


Рис. 1 – Вид двухзвенного шарнирного манипулятора “PUMA 550 / 560”

двигателя, установленного на первом звене, учтена в соответствующих параметрах первого звена), i – передаточное отношение второго двигателя [21].

Уравнения движения описываются следующей моделью

$$\begin{cases} D(q_1)\ddot{q}_1 + B(q_1)\ddot{q}_2 + C_1(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2)\dot{q}_1 + C_2(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_2 + K(q_1 - q_2) + g(q_1) = 0 \\ J\ddot{q}_2 + B^T(q_1)\dot{q}_1 + C_3(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + K(q_2 - q_1) = u \end{cases} \quad (15)$$

Где

$q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix}$ – вектора углов поворота звеньев и роторов, соответственно

$$D(q_1) = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 \cos(q_{12}) & a_3 + a_2 \cos(q_{12}) \\ a_3 + a_2 \cos(q_{12}) & a_3 \end{bmatrix};$$

$$B(q_1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_2}{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} C_1(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2) & C_2(q_1, \dot{q}_1) \\ C_3(q_1, \dot{q}_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 \dot{q}_{12} (2\dot{q}_{11} + \dot{q}_{12}) \sin(q_{12}) \\ a_2 \dot{q}_{11} \sin(q_{12}) \end{bmatrix}; \quad (16)$$

$$g(q_1) = \begin{bmatrix} (ml_2 + m_2 l_{c_2})g \cos(q_{11} + q_{12}) + (m_1 l_{c_1} + m_2 l_1 + ml_1)g \cos(q_{11}) \\ (ml_2 + m_2 l_{c_2})g \cos(q_{11} + q_{12}) \end{bmatrix};$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix};$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix};$$

$$a_1 = m(l_1^2 + l_2^2) + m_1 l_{c_1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c_2}^2) + J_{c_1} + J_{c_2} + \frac{J_2}{i^2};$$

$$a_2 = l_1(ml_2 + m_2 l_{c_2});$$

$$a_3 = ml_2^2 + m_2 l_{c_2} + J_{c_2}$$

Введем обозначения:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ \dot{q}_{11} \\ \dot{q}_{12} \\ q_{21} \\ q_{22} \\ \dot{q}_{21} \\ \dot{q}_{22} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} [a_1 + 2a_2 \cos(x_2)] * \dot{x}_3 + [a_3 + a_2 \cos(x_2)] * \dot{x}_4 + \frac{J_2}{i} \dot{x}_8 - a_2 x_4 (2x_3 + x_4) \\ * \sin(x_2) + k_1 x_1 + (ml_2 + m_2 l_{c_2}) * g * \cos(x_1 + x_2) \\ + (m_1 l_{c_1} + m_2 l_1 + ml_1) * g * \cos(x_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a_3 + a_2 \cos(x_2)] * \dot{x}_3 + a_3 \dot{x}_4 - a_2 x_4 * (2x_3 + x_4) * \sin(x_2) - k_2 x_6 \\ + (ml_2 + m_2 l_{c_2}) * g * \cos(x_1 + x_2) = 0 \end{aligned}$$

$$J_1 \dot{x}_7 + a_2 x_3 * \sin(x_2) + k_1 x_5 = u, \quad (18)$$

$$J_2 \dot{x}_8 + \frac{J_2}{i} \dot{x}_4 + a_2 x_3 * \sin(x_2) - k_2 x_2 = u$$

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_5 = x_7$$

$$\dot{x}_6 = x_8$$

Если ввести 8*8-матрицу функций $C(x)$ и 8-вектор-функцию $B(x,u)$ со следующими элементами

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 1; & c_{12} &= 0; & c_{13} &= 0; & c_{14} &= 0; & c_{15} &= 0; & c_{16} &= 0; & c_{17} &= 0; \\
 c_{18} &= 0; & c_{21} &= 0; & c_{22} &= 1; & c_{23} &= 0; & c_{24} &= 0; & c_{25} &= 0; & c_{26} &= 0; \\
 c_{27} &= 0 & c_{28} &= 0; & c_{31} &= 0; & c_{32} &= 0; & & & c_{33} &= [a_1 + 2a_2 \cos(x_2)]; \\
 & & c_{34} &= [a_3 + a_2 \cos(x_2)]; & & & c_{35} &= 0; & c_{36} &= 0; & c_{37} &= 0; & c_{38} &= J_2/i; \\
 \\
 c_{41} &= 0; & c_{42} &= 0; & & & c_{43} &= [a_3 + a_2 \cos(x_2)]; & & & c_{44} &= a_3; & c_{45} &= 0; \\
 c_{46} &= 0; & c_{47} &= 0; & c_{48} &= 0; & c_{51} &= 0; & c_{52} &= 0; & c_{53} &= 0; & c_{54} &= 0; \\
 c_{55} &= 1; & c_{56} &= 0; & c_{57} &= 0; & c_{58} &= 0; & c_{61} &= 0; & c_{62} &= 0; & c_{63} &= 0; \\
 c_{64} &= 0; & c_{65} &= 0; & c_{66} &= 1; & c_{67} &= 0; & c_{68} &= 0; & c_{71} &= 0; & c_{72} &= 0; \\
 c_{73} &= 0; & c_{74} &= 0; & c_{75} &= 0; & c_{76} &= 0; & c_{77} &= J_1; & c_{78} &= 0; & c_{81} &= 0; \\
 c_{82} &= 0; & c_{83} &= 0; & & & c_{84} &= J_2/i; & c_{85} &= 0; & c_{86} &= 0; & c_{87} &= 0; \\
 c_{88} &= J_2; & b_1 &= x_3; & b_2 &= x_4; \\
 \\
 b_3 &= a_2 x_4 (2x_3 + x_4) * \sin(x_2) - k_1 x_1 - (m l_2 + m_2 l_{c_2}) * g * \cos(x_1 + x_2) \\
 & \quad - (m_1 l_{c_1} + m_2 l_1 + m l_1) * g * \cos(x_1); \\
 b_4 &= a_2 x_4 * (2x_3 + x_4) * \sin(x_2) + k_2 x_6 - (m l_2 + m_2 l_{c_2}) * g * \cos(x_1 + x_2); \\
 b_5 &= x_7; & b_6 &= x_8; \\
 b_7 &= -a_2 x_3 * \sin(x_2) - k_1 x_5 + u; & b_8 &= -a_2 x_3 * \sin(x_2) + k_2 x_2 + u;
 \end{aligned}$$

То систему дифференциальных уравнений (18) можно переписать в векторном виде

$$A(x) * \dot{x} = B(x,u) \tag{19}$$

Перепишем уравнения (19) в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений (1), необходимо вычислить обратную матрицу от $A(x)$ и затем вектор-функцию

$$f(x,u) = A^{-1}(x) * B(x,u). \tag{20}$$

Ввиду сложности обращения матриц $A(x)$, элементы которой зависят от 8-ми переменных, дальнейшие расчеты будем проводить для робота «PUMA 550/560» при следующих значениях:

$$\begin{aligned}
 i &= 1 \dots 1000; & k_1 &= 25000 \text{ Нм}; & k_2 &= 6500 \text{ Нм}; \\
 l_{c_1} &= l_{c_2} = 0.1 \text{ м}; & l_1 &= l_2 = 0.5 \text{ м}; & m_1 &= 40 \text{ кг}; & m_2 &= 24 \text{ кг}; & m &= 5 \text{ кг}; \\
 J_{c_1} &= 2.1 \text{ кг м}^2; & J_{c_2} &= 0.7 \text{ кг м}^2; & J_1 &= 20 \text{ кг м}^2; & J_2 &= 3 \text{ кг м}^2.
 \end{aligned}$$

Для проведения аналитических вычислений применим программу, реализованную на системе Matlab. Текст программы приводится ниже.

$$Nm = \text{sym}('[0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0]'); C = [Nm \text{ Nm}; Nm \text{ Nm}];$$


```

B=sym('[0 0 0 0 0 0 0 0]'); F=sym('[0 0 0 0 0 0 0 0]');
i=1; m=5; m1=40; m2=42; J1=20; J2=3; Jc1=2.1; Jc2=0.7; L1=0.5; L2=0.5;
Lc1=0.1; Lc2=0.1; k1=25000; k2=6500; g=1;
a1=m*(L1*L1+L2*L2)+m1*Lc1*Lc1+m2*(L1*L1+Lc2*Lc2)+Jc1+Jc2+J2/(i*i);
a2=L1*(m*L2+m2*Lc2); a3=m*L2*L2+m2*Lc2+Jc2;
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 u;
C(1,1)=1; C(2,2)=1; C(3,3)=a1+2*a2*cos(x2); C(3,4)=a3+a2*cos(x2);
C(3,8)=J2/i; C(4,3)=a3+a2*cos(x2); C(4,4)=a3; C(5,5)=1; C(6,6)=1;
C(7,7)=J1; C(8,8)=J2; C(8,4)=J2/i; C
B(1)=x3; B(2)=x4;
B(3)=a2*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-k1*x1-(m*L2+m2*Lc2)*g*cos(x1+x2)-
(m1*Lc1+m2*L1+m*L1)*g*cos(x1);
B(4)=a2*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-k2*x6+(m*L2+m2*Lc2)*g*cos(x1+x2);
B(5)=x7; B(6)=x8; B(7)=-a2*x3*sin(x2)-k1*x5+u;
B(8)=-a2*x3*sin(x2)-k2*x2+u; B.'
Cb=inv(C); Cb
for ii = 1:8
ch=0;
for jj=1:8
ch=ch+Cb(ii,jj)*B(jj);
end;
F(ii)=ch;
end;
F.'
End

```

Ниже представлены результаты выполнения программы

```

c11 = 1; c12 = 0; c13 = 0; c14 = 0; c15 = 0; c16 = 0; c17 = 0; c18 = 0;
c21 = 0; c22 = 1; c23 = 0; c24 = 0; c25 = 0; c26 = 0; c27 = 0; c28 = 0;
c31 = 0; c32 = 0; c33 =  $\frac{981}{50} + \frac{67}{10} * \cos(x2)$ ; c34 = 123/20 + 67/20 * cos(x2);
c35 = 0; c36 = 0; c37 = 0; c38 = 3;
c41 = 0; c42 = 0; c43 = 123/20+67/20*cos(x2); c44 = 123/20;
c45 = 0; c46 = 0; c47 = 0; c48 = 0;
c51 = 0; c52 = 0; c53 = 0; c54 = 0; c55 = 1; c56 = 0; c57 = 0; c58 = 0;
c61 = 0; c62 = 0; c63 = 0; c64 = 0; c65 = 0; c66 = 1; c67 = 0; c68 = 0;
c71 = 0; c72 = 0; c73 = 0; c74 = 0; c75 = 0; c76 = 0; c77 = 20; c78 = 0;
c81 = 0; c82 = 0; c83 = 0; c84 = 3; c85 = 0; c86 = 0; c87 = 0; c88 = 3;
b1 = x3; b2 = x4;
b3 = 67/20*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-25000*x1-67/10*cos(x1+x2)-55/2*cos(x1);
b4 = 67/20*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-6500*x6+67/10*cos(x1+x2);

```

$$b_5 = x_7; \quad b_6 = x_8;$$

$$b_7 = -\frac{67}{20} * x_3 * \sin(x_2) - 25000 * x_5 + u;$$

$$b_8 = -\frac{67}{20} * x_3 * \sin(x_2) - 6500 * x_2 + u.$$

Обозначим элементы 8*8-матрицы $C^{-1}(x)$ через cp_{ij} , которые примут следующие значения (только ненулевые):

$$cp_{11} = 1; \quad cp_{22} = 1;$$

$$cp_{33} = -12300 / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2);$$

$$cp_{34} = 100 * (63 + 67 * \cos(x_2)) / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2);$$

$$cp_{38} = 12300 / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2);$$

$$cp_{43} = 100 * (123 + 67 * \cos(x_2)) / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2);$$

$$cp_{44} = -40 * (981 + 335 * \cos(x_2)) / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2);$$

$$cp_{48} = -100 * (123 + 67 * \cos(x_2)) / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2);$$

$$cp_{55} = 1; \quad c_{66} = 1; \quad c_{77} = 1/20;$$

$$c_{83} = -100 * (123 + 67 * \cos(x_2)) / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2);$$

$$c_{84} = 40 * (981 + 335 * \cos(x_2)) / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2);$$

$$c_{88} = 1/3 * (-165681 + 22445 * \cos(x_2)^2) / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2).$$

Уравнения робота (18) приведем к нормальному виду

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \tag{21}$$

где

$$f(x, u) = C^{-1}(x) * B(x, u) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_8 \end{pmatrix}, \quad f_1 = x_3, \quad f_2 = x_4,$$

$$f_3 = -12300 / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2) * (67/20 * x_4 * (2 * x_3 + x_4) * \sin(x_2) - 25000 * x_1 - 67/10 * \cos(x_1 + x_2) - 55/2 * \cos(x_1)) + 100 * (63 + 67 * \cos(x_2)) / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2) * (67/20 * x_4 * (2 * x_3 + x_4) * \sin(x_2) - 500 * x_6 + 67/10 * \cos(x_1 + x_2)) + 12300 / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2) * (-67/20 * x_3 * \sin(x_2) - 6500 * x_2 + u),$$

$$f_4 = 100 * (123 + 67 * \cos(x_2)) / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2) * (67/20 * x_4 * (2 * x_3 + x_4) * \sin(x_2) - 25000 * x_1 - 67/10 * \cos(x_1 + x_2) - 55/2 * \cos(x_1)) - 40 * (981 + 335 * \cos(x_2)) / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2) * (67/20 * x_4 * (2 * x_3 + x_4) * \sin(x_2) - 6500 * x_6 + 67/10 * \cos(x_1 + x_2)) - 100 * (123 + 67 * \cos(x_2)) / (-202581 - 20100 * \cos(x_2) + 22445 * \cos(x_2)^2) * (-67/20 * x_3 * \sin(x_2) - 6500 * x_2 + u)$$

$$f_5 = x_7, \quad f_6 = x_8, \quad f_7 = -67/400 * x_3 * \sin(x_2) - 1250 * x_5 + 1/20 * u,$$

$$f_8 = -100*(123+67*\cos(x2))/(-202581-20100*\cos(x2) + 22445*\cos(x2)^2)*(67/20*x4*(2*x3+x4)*\sin(x2)-25000*x1-67/10*\cos(x1+x2)-55/2*\cos(x1)) + 40*(981+335*\cos(x2))/(-202581-20100*\cos(x2) + 22445*\cos(x2)^2)*(67/20*x4*(2*x3+x4)*\sin(x2)-6500*x6 + 67/10*\cos(x1+x2)) + 1/3*(-165681+22445*\cos(x2)^2)/(-202581 - 20100*\cos(x2) + 22445*\cos(x2)^2)*(-67/20*x3*\sin(x2) - 6500*x2+u)$$

С помощью программы, написанной на MatLab и начальный фрагмент которого представлен ниже, получим следующие результаты линеаризации системы (21).

```
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x A b c
x0 = [0 0 4 2 0 0 1 1];
x = [x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8];
t = [0 10];
y0 = x0; u = 0;
F = [...x3;...x4;...-369./(-6070.-603.*cos(x2)+673.*cos(x2)^2)*(3.35*x4*(2.*x3+x4)*sin(x2)-.25000.*x1-6.70*cos(x1+x2)-27.5*cos(x1)))+(189.+201.*cos(x2))/(-6070.-603.*cos(x2)+673.*cos(x2)^2)*(3.35*x4*(2.*x3+x4)*sin(x2)-6500.*x6+6.70*cos(x1+x2))+369./(-6070.-603.*cos(x2)+673.*cos(x2)^2)*(-3.35*x3*sin(x2)-6500.*x2+u);
... (369.+201.*cos(x2))/(-6070.-603.*cos(x2)+673.*cos(x2)^2)*(3.35*x4*(2.*x3+x4)*sin(x2)-25000.*x1-6.70*cos(x1+x2)-27.5*cos(x1))-(1180.+402.*cos(x2))/(-6070.-603.*cos(x2)+673.*cos(x2)^2)*(3.35*x4*(2.*x3+x4)*sin(x2)-6500.*x6+6.70*cos(x1+x2))-1.*(369.+201.*cos(x2))/(-6070.-603.*cos(x2)+673.*cos(x2)^2)*(-3.35*x3*sin(x2)-6500.*x2+u);
x7; x8; 168*x3*sin(x2)-1250.*x5+.05*u;
...-1.*(369.+201.*cos(x2))/(-6070.-603.*cos(x2)+673.*cos(x2)^2)*(3.35*x4*(2.*x3+x4)*sin(x2)-25000.*x1-6.70*cos(x1+x2)-27.5*cos(x1))+(1180.+402.*cos(x2))/(-6070.-603.*cos(x2)+673.*cos(x2)^2)*(3.35*x4*(2.*x3+x4)*sin(x2)-6500.*x6+6.70*cos(x1+x2))+(-1650.+224.*cos(x2)^2)/(-6070.-603.*cos(x2)+673.*cos(x2)^2)*(-3.35*x3*sin(x2)-6500.*x2+u)];
```

Представим результат выполнения программы в следующем виде:

$$A(x) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{18} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{28} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{81} & a_{82} & \dots & a_{68} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Выпишем только ненулевые элементы матрицы A(x):

$$a_{13}=1, a_{24}=1, a_{31}=(369.0*(6.7*\sin(x1 + x2) + 27.5*\sin(x1) - 0.25))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + (6.7*\sin(x1 + x2)*(201.0*\cos(x2) + 189.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0),$$

$$a_{32} = (369.0*(3.35*x^3*\cos(x2) + 6500.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + (369.0*(6.7*\sin(x1 + x2) + 3.35*x^4*\cos(x2))*(2.0*x^3 + x4))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + (201.0*\sin(x2)*(6.7*\cos(x1 + x2) - 6500.0*x6 + 3.35*x^4*\sin(x2))*(2.0*x^3 + x4))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + ((6.7*\sin(x1 + x2) - 3.35*x^4*\cos(x2))*(2.0*x^3 + x4))*(201.0*\cos(x2)+189.0))/(603.0*\cos(x2)-673.0*\cos(x2)^2+6070.0)+(369.0*(603.0*\sin(x2) - 1346.0*\cos(x2)*\sin(x2))*(6500.0*x2 + 3.35*x^3*\sin(x2)))/(- 673.0*\cos(x2)^2 + 603.0*\cos(x2) + 6070.0)^2 - (369.0*(603.0*\sin(x2) - 1346.0*\cos(x2)*\sin(x2))*(0.25*x1 + 6.7*\cos(x1 + x2) + 27.5*\cos(x1) - 3.35*x^4*\sin(x2))*(2.0*x^3 + x4)))/(- 673.0*\cos(x2)^2 + 603.0*\cos(x2) + 6070.0)^2 - (1.0*(201.0*\cos(x2) + 189.0)*(603.0*\sin(x2) - 1346.0*\cos(x2)*\sin(x2))*(6.7*\cos(x1 + x2) - 6500.0*x6 + 3.35*x^4*\sin(x2))*(2.0*x^3 + x4)))/(- 673.0*\cos(x2)^2 + 603.0*\cos(x2) + 6070.0)^2$$

$$a_{33} = 1236.1*\sin(x2))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + (2472.3*x^4*\sin(x2))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (6.7*x^4*\sin(x2)*(201.0*\cos(x2) + 189.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0)^2,$$

$$a_{34} = (369.0*(3.35*\sin(x2))*(2.0*x^3+x4)+3.35*x^4*\sin(x2)))/(603.0*\cos(x2)-673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (1.0*(3.35*\sin(x2))*(2.0*x^3 + x4) + 3.35*x^4*\sin(x2))*(201.0*\cos(x2) + 189.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0)$$

$$a_{36} = 6500.0*(201.0*\cos(x2) + 189.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0)$$

$$a_{41} = - (6.7*\sin(x1 + x2)*(402.0*\cos(x2) + 1180.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (1.0*(201.0*\cos(x2) + 369.0)*(6.7*\sin(x1 + x2) + 27.5*\sin(x1) - 25000.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0),$$

$$a_{42} = (201.0*\sin(x2)*(6500.0*x2 + 3.35*x^3*\sin(x2)))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (1.0*(201.0*\cos(x2) + 369.0)*(3.35*x^3*\cos(x2) + 6500.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (1.0*(201.0*\cos(x2) + 369.0)*(6.7*\sin(x1 + x2) + 3.35*x^4*\cos(x2))*(2.0*x^3 + x4)))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (402.0*\sin(x2)*(6.7*\cos(x1 + x2) - 6500.0*x6 + 3.35*x^4*\sin(x2))*(2.0*x^3 + x4)))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (1.0*(6.7*\sin(x1 + x2) - 3.35*x^4*\cos(x2))*(2.0*x^3 + x4))*(402.0*\cos(x2) + 1180.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (201.0*\sin(x2)*(25000.0*x1 + 6.7*\cos(x1 + x2) + 27.5*\cos(x1) - 3.35*x^4*\sin(x2))*(2.0*x^3 + x4)))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (1.0*(201.0*\cos(x2) + 369.0)*(603.0*\sin(x2) - 1346.0*\cos(x2)*\sin(x2))*(6500.0*x2 + 3.35*x^3*\sin(x2)))/(- 673.0*\cos(x2)^2 + 603.0*\cos(x2) + 6070.0)^2 + ((201.0*\cos(x2) + 369.0)*(603.0*\sin(x2) - 1346.0*\cos(x2)*\sin(x2))*(25000.0*x1 + 6.7*\cos(x1 + x2) + 27.5*\cos(x1) - 3.35*x^4*\sin(x2))*(2.0*x^3 + x4)))/(- 673.0*\cos(x2)^2 + 603.0*\cos(x2) + 6070.0)^2 + ((402.0*\cos(x2) + 1180.0)*(603.0*\sin(x2) - 1346.0*\cos(x2)*\sin(x2))*(6.7*\cos(x1 + x2) - 6500.0*x6 + 3.35*x^4*\sin(x2))*(2.0*x^3 + x4)))/(- 673.0*\cos(x2)^2 + 603.0*\cos(x2) + 6070.0)^2$$

$$a_{43} = (6.7*x^4*\sin(x2)*(402.0*\cos(x2) + 1180.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (6.7*x^4*\sin(x2)*(201.0*\cos(x2) + 369.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (3.35*\sin(x2)*(201.0*\cos(x2) + 369.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0),$$

$$a_{44} = ((3.35*\sin(x2)*(2.0*x3 + x4) + 3.35*x4*\sin(x2))*(402.0*\cos(x2) + 1180.0))/(603.0 * \cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (1.0*(3.35*\sin(x2)*(2.0*x3 + x4) + 3.35*x4*\sin(x2))*(201.0*\cos(x2) + 369.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0),$$

$$a_{41} = \cos(x2)*\cos(x3),$$

$$a_{46} = - (6500.0*(402.0*\cos(x2) + 1180.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0),$$

$$a_{57} = 1, a_{68} = 1,$$

$$a_{72} = 168.0*x3*\cos(x2), a_{73} = 168.0*\sin(x2), a_{75} = - 1250.0,$$

$$a_{81} = (6.7*\sin(x1 + x2)*(402.0*\cos(x2) + 1180.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + ((201.0*\cos(x2) + 369.0)*(6.7*\sin(x1 + x2) + 27.5*\sin(x1) - 25000.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0),$$

$$a_{82} = ((224.0*\cos(x2)^2 - 1650.0)*(3.35*x3*\cos(x2) + 6500.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + (201.0*\sin(x2)*(25000.0*x1 + 6.7*\cos(x1 + x2) + 27.5*\cos(x1) - 3.35*x4*\sin(x2)*(2.0*x3 + x4)))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + ((201.0*\cos(x2) + 369.0)*(6.7*\sin(x1 + x2) + 3.35*x4*\cos(x2)*(2.0*x3 + x4)))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + (402.0*\sin(x2)*(6.7*\cos(x1 + x2) - 6500.0*x6 + 3.35*x4*\sin(x2)*(2.0*x3 + x4)))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + ((6.7*\sin(x1 + x2) - 3.35*x4*\cos(x2)*(2.0*x3 + x4))*(402.0*\cos(x2) + 1180.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (1.0*(201.0*\cos(x2) + 369.0)*(603.0*\sin(x2) - 1346.0*\cos(x2)*\sin(x2))*(25000.0*x1 + 6.7*\cos(x1 + x2) + 27.5*\cos(x1) - 3.35*x4*\sin(x2)*(2.0*x3 + x4)))/(- 673.0*\cos(x2)^2 + 603.0*\cos(x2) + 6070.0)^2 - (1.0*(402.0*\cos(x2) + 1180.0)*(603.0*\sin(x2) - 1346.0*\cos(x2)*\sin(x2))*(6.7*\cos(x1 + x2) - 6500.0*x6 + 3.35*x4*\sin(x2)*(2.0*x3 + x4)))/(- 673.0*\cos(x2)^2 + 603.0*\cos(x2) + 6070.0)^2 - (448.0*\cos(x2)*\sin(x2)*(6500.0*x2 + 3.35*x3*\sin(x2)))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + ((224.0*\cos(x2)^2 - 1650.0)*(603.0*\sin(x2) - 1346.0*\cos(x2)*\sin(x2))*(6500.0*x2 + 3.35*x3*\sin(x2)))/(- 673.0*\cos(x2)^2 + 603.0*\cos(x2) + 6070.0)^2.$$

$$a_{83} = (3.35*\sin(x2)*(224.0*\cos(x2)^2 - 1650.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) + (6.7*x4*\sin(x2)*(201.0*\cos(x2) + 369.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (6.7*x4*\sin(x2)*(402.0*\cos(x2) + 1180.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0),$$

$$a_{84} = ((3.35*\sin(x2)*(2.0*x3 + x4) + 3.35*x4*\sin(x2))*(201.0*\cos(x2) + 369.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0) - (1.0*(3.35*\sin(x2)*(2.0*x3 + x4) + 3.35*x4*\sin(x2))*(402.0*\cos(x2) + 1180.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0),$$

$$a_{86} = (6500.0*(402.0*\cos(x2) + 1180.0))/(603.0*\cos(x2) - 673.0*\cos(x2)^2 + 6070.0).$$

Вычислим значение матрицы A(x) в точке $x_0 = [0 \ 0 \ 4 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$;

$$A(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.015375 & 400.34 & 0 & 0 & 0 & 422.5 & 0 & 0 \\ 2375.0 & -607.47 & 0 & 0 & 0 & -1713.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 672.0 & 0 & 0 & -1250.0 & 0 & 0 & 0 \\ -2375.0 & -1559.3 & 0 & 0 & 0 & 1713.8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

В дальнейшем матрица A , представленная в виде (23), может быть использована для анализа устойчивости или управляемости модели двухзвенного робота в заданной точке.

Выводы. На основе систем аналитических вычислений MatLab автоматизирована процедура линеаризации нелинейной системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Эффективность предложенной процедуры продемонстрирована на двух примерах.

Для математической модели динамики беспилотного летательного аппарата, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка, автоматически построена линеаризованная система.

Для математической модели двухзвенного робота разработаны две процедуры. Первая процедура позволяет нормализовать математическую модель, полученную на основе уравнений Лагранжа второго рода. Вторая процедура по нормализованной математической модели строит ее линеаризованную копию.

В дальнейшем полученные линеаризованные модели могут быть использованы для изучения свойств устойчивости или управляемости исходной модели.

Работа выполнена за счет средств программно-целевого финансирования научных исследований на 2023-2025 годы по проекту ИРН AP19676966 «Разработка программно-аппаратного комплекса психофизиологического отбора и реабилитации снайперов».

Литература

1. Борисов О.И. Методы управления робототехническими приложениями. – СПб.: Университет ИТМО, 2016. – 108 с.
2. Булгаков А.Г., Воробьев В.А. Промышленные роботы. Кинематика, динамика, контроль и управление. – М.: Солон-Пресс, 2011. – 488 с.
3. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.: Юнити-Дана, 2002. – 399 с.
4. Христиановский В.В., Щербина В.П. Экономико-математические методы и модели: теория и практика. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 335 с.
5. Теуш Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Курс для будущих инженеров. – М.: Ленанд, 2022. – 504 с.
6. Борисов В.Г. Прикладные задачи теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Механическое движение. – Кемерово: Кемеровский гос. университет, 2015. – 130 с.
7. Francesco Boarotto, Mario Sigalott. Dwell-time control sets and applications to the stability analysis of linear switched systems // Journal of Differential Equations, 2020. – Vol. 268. – Issue 4. – P. 1345-1378.
8. Víctor Ayala, Adriano Da Silva, Philippe Jouan, Guilherme Zsigmond. Control sets of linear systems on semi-simple Lie groups” // Journal of Differential Equations, 2020. – Vol. 269. – Issue 1. – P. 449-466.
9. Wenbing Zhang, Qing-Long Han, Yang Tang, Yurong Liu. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems // Automatica, 2019. – Vol. 103. – P. 126-134.
10. Mazakov T., Wójcik W., Jomartova Sh., Karymsakova N., Ziyatbekova G., Tursynbai A. The Stability Interval of the Set of Linear System // INTL Journal of Electronics and Telecommunications, 2021. – 67(2). – Pp.155-161. DOI: 10.24425/ijet.2021.135958

11. A. Mazakova, S. Jomartova, T. Mazakov, T. Shormanov, B. Amirkhanov. Controllability of an unmanned aerial vehicle // IEEE 7th International Energy Conference (ENERGYCON), 2022. – Pp. 1-5. doi: 10.1109/ENERGYCON53164.2022.9830244.

12. Щеглова А.А. Об управляемости нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений // Материалы Международ. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», Минск, 2008. – С.166-168.

13. Молчанов А.М. Об устойчивости нелинейных систем. – Пушкино: Институт математических проблем биологии РАН, 2013. – 103 с.

14. Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А. Программирование и разработка приложений в Maple. Гродно: ГрГУ; Таллинн: Межд. Акад. Ноосферы, 2007. – 458 с.

15. Лазарев Ю. Моделирование процессов и систем в Matlab. – СПб.: Питер: Изд. группа BHV, 2005. – 512 с.

16. Дьяконов В.П. Системы компьютерной алгебры Derive. – М.: Солон-Пресс, 2002. – 320 с.

17. Грошева М.В., Ефимов Г.Б., Самсонов В.А. История использования аналитических вычислений в задачах механики. – М.: ИПМ имени Келдыша РАН, 2005. – 87 с.

18. Дьяконов В.П. Энциклопедия компьютерной алгебры. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 1264 с.

19. Квитко А.Н. Методы решения краевых задач для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и их применение при решении задач управления движением центра масс летательного аппарата // Автореф. диссер. доктор. физ-мат. наук, спец. 01.01.11 – системный анализ и автоматическое управление. – СПб., 1992. – 30 с.

20. Бурдаков С.Ф. Математические модели и идентификация роботов с упругими элементами. – Л.: ЛГТУ. 1990. – 95 с.

21. Фрейдович Л.Б. Устойчивость и управление манипуляционными роботами // Дис. кандидата физ-мат. наук, спец. 05.13.16 – применение выч.техники, мат.моделирования и мат. методов в научных исследованиях. – СПб., 1999. – 156 с.

References

1. Borisov O.I. Methods of control of robotics applications. – St. Petersburg: ITMO University, 2016. – 108 p.

2. Bulgakov A.G., Vorobyov V.A. Industrial robots. Kinematics, dynamics, control and management. – M.: Solon-Press, 2011. – 488 p.

3. Kolemaev V.A. Mathematical Economics. – M.: Unity-Dana, 2002. – 399 p.

4. Khristianovsky V.V., Shcherbina V.P. Economic and mathematical methods and models: theory and practice. – Donetsk: DonNU. 2010. – 335 p.

5. Teush B.L. Ordinary differential equations: A course for future engineers. – M.: Lenand, 2022. – 504 p.

6. Borisov V.G. Applied Problems of the Theory of Ordinary Differential Equations. Mechanical motion. – Kemerovo: Kemerovo State University, 2015. – 130 p.

7. Francesco Boarotto, Mario Sigalott. Dwell-time control sets and applications to the stability analysis of linear switched systems // Journal of Differential Equations, 2020. – Vol. 268. – Issue 4. – P. 1345-1378.

8. Víctor Ayala, Adriano Da Silva, Philippe Jouan, Guilherme Zsigmond. Control sets of linear systems on semi-simple Lie groups” // Journal of Differential Equations, 2020. – Vol. 269. – Issue 1. – P. 449-466.
9. Wenbing Zhang, Qing-Long Han, Yang Tang, Yurong Liu. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems // Automatica, 2019. – Vol. 103. – P. 126-134.
10. Mazakov T., Wójcik W., Jomartova Sh., Karymsakova N., Ziyatbekova G., Tursynbai A. The Stability Interval of the Set of Linear System // INTL Journal of Electronics and Telecommunications, 2021. – 67(2). – Pp.155-161. DOI: 10.24425/ijet.2021.135958
11. A. Mazakova, S. Jomartova, T. Mazakov, T. Shormanov, B. Amirkhanov. Controllability of an unmanned aerial vehicle // IEEE 7th International Energy Conference (ENERGYCON), 2022. – Pp. 1-5. doi: 10.1109/ENERGYCON53164.2022.9830244.
12. Shcheglova A.A. On controllability of nonlinear differential-algebraic equations // Proc. of International Conference “Dynamic Systems: Stability, Control, Optimization”. – Minsk, 2008. – Pp.166-168.
13. Molchanov A.M. On the stability of nonlinear systems. – Pushchino: Institute of Mathematical Problems of Biology RAS, 2013. – 103 p.
14. Aladyev V.Z., Boyko V.K., Rovba E.A. Programming and Development of Applications in Maple. Grodno: GrSU. – Tallinn: International Noosphere Academy, 2007. – 458 p.
15. Lazarev Y. Modeling Processes and Systems in Matlab. – SPb.: Peter: VNV Publishing Group, 2005. – 512 p.
16. Dyakonov V.P. Systems of computer algebra Derive. – M.: Solon-Press, 2002. – 320 p.
17. Grosheva M.V., Efimov G.B., Samsonov V.A. History of using analytical calculations in mechanics problems. – M.: The Keldysh Institute for Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 2005. – 87 p.
18. Dyakonov V.P. Encyclopedia of computer algebra. – M.: DMK Press, 2010. – 1264 p.
19. Kvitko A.N. Methods for solving boundary value problems for controllable systems of ordinary differential equations and their application in solving problems of controlling the motion of the center of mass of an aircraft // D. thesis, specialty 01.01.11 – system analysis and automatic control. – D. thesis, speciality 01.01.11 – System analysis and automatic control. – 30 p.
20. Burdakov S.F. Mathematical models and identification of robots with elastic elements. – L.: LSTU. 1990. – 95 p.
21. Freidovich L.B. Stability and control of manipulating robots // D. thesis in Physics and Mathematics, specialty 05.13.16 – application of calculus, modeling and mathematical methods in scientific research. – SPb., 1999. – 156 p.

Сведения об авторах

Мазакова А.Т. – докторант НАО Казахского национального университета имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан, aigegym97@mail.ru;

Жомартова Ш.А. – доктор технических наук, доцент НАО Казахского национального университета имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан, jomartova@mail.ru;

Мазаков Т.Ж. – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института Информационных и вычислительных технологий КН МНВО РК, профессор НАО Казахского национального университета имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан, tmazakov@mail.ru;

Зиятбекова Г.З. – PhD, и.о. доцента НАО Казахского национального университета имени аль-Фараби; старший научный сотрудник Института Информационных и вычислительных технологий КН МНВО РК, Алматы, Казахстан, ziyatbekova@mail.ru;

Досаналиева А.Т. – старший преподаватель университета «Туран», докторант НАО «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева», Алматы, Казахстан, a.dosanalieva@turand-edu.kz

Information about the authors

Mazakova A. T. – doctoral student at NAO Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan; aigerym97@mail.ru;

Jomartova Sh.A. – NAO Al-Farabi Kazakh National University, doctor of technical sciences, ass. professor, Almaty, Kazakhstan; jomartova@mail.ru;

Mazakov T. Zh. – NAO Al-Farabi Kazakh National University, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Almaty, Kazakhstan, Chief Researcher at the RSE Institute of Information and Computational Technologies of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan, tmazakov@mail.ru;

Ziyatbekova G. Z. – PhD, Acting Associate Professor NAO Al-Farabi Kazakh National University; Senior Researcher at the RSE Institute of Information and Computational Technologies of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan, ziyatbekova@mail.ru;

Dossanaliyeva A. T. – Senior lecturer at Turan University, Doctoral student at Gumarbek Daukeev Almaty University of Energy and Communications, Almaty, Kazakhstan, a.dosanalieva@turand-edu.kz