

ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ**^{1,2}Т.Ж. Мазаков** , **¹Ш.А. Джомартова, ¹А.Т. Мазакова, ³Г.Ч. Тойкенов,**
^{1,2}М.С. Алиаскар, ³У.Г. Тойкенова¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан,²Международный инженерно-технологический университет, Алматы, Казахстан,³Казахский национальный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан Correspondent-author: tmazakov@mail.ru

Целью данной работы является определение параметров математической модели, описывающей прорывы селевых потоков через гидротехнические объекты, такие как дамбы и плотины. Достижение этой цели позволит соотнести разработанную модель с реальными наблюдениями и данными. Важность исследования обусловлена увеличением частоты и интенсивности катастрофических наводнений, вызванных разрушением таких сооружений, что подчеркивает необходимость разработки эффективных методов для прогнозирования и предотвращения подобных инцидентов. Методы и подходы, предложенные в данной работе, обладают высоким практическим значением для оценки вероятных рисков, организации эвакуационных мероприятий и снижения ущерба от аварий, связанных с разрушением дамб и плотин.

Ключевые слова: гидротехнические сооружения (ГТС), параметры, идентификация, прорыв дамбы, селевой поток, математическое моделирование.

МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРДІ КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИЯ ӘДІСІМЕН СӘЙКЕСТЕНДІРУ**^{1,2}Т.Ж. Мазаков** , **¹Ш.А. Джомартова, ¹А.Т. Мазақова, ³Г.Ч Тойкенов,**
^{1,2}М.С. Әлиасқар, ³Тойкенова У.Г.¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,²Халықаралық инженерлік-технологиялық университет, Алматы, Қазақстан,³Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан,
e-mail: tmazakov@mail.ru

Бұл зерттеудің мақсаты — гидротехникалық құрылыстар, соның ішінде бөгеттер мен дамбалар арқылы болатын сел ағындарының жарылуын сипаттайтын математикалық модельдің параметрлерін анықтау. Бұл мақсатқа қол жеткізу әзірленген модельді нақты бақылаулармен және деректермен салыстыруға мүмкіндік береді. Зерттеудің өзектілігі осындай құрылыстардың бұзылуы салдарынан болатын апатты су тасқындарының жиілігі мен қарқындылығының артуымен ерекшеленеді, бұл осындай оқиғаларды болжау және алдын алу үшін тиімді әдістерді әзірлеу қажеттігін көрсетеді. Осы жұмыста ұсынылған әдістер мен тәсілдер ықтимал тәуекелдерді бағалауға, эвакуация шараларын ұйымдастыруға және дамбалар мен бөгеттердің бұзылуымен байланысты апаттардан келетін шығындарды азайтуға үлкен практикалық мәнге ие.

Түйін сөздер: гидротехникалық құрылыстар (ГТҚ), параметрлер, сәйкестендіру, дамбаның жарылуы, сел ағыны, математикалық модельдеу.

IDENTIFICATION OF MATHEMATICAL MODELS USING THE QUASILINEARIZATION METHOD**^{1,2} T.Zh. Mazakov** , **¹S ¹h.A. Jomartova, ¹A.T. Mazakova, ³G.Ch. Toykenov,**
^{1,2}M.S. Aliaskar, ³U.G. Toykenova¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,²International Engineering and Technology University, Almaty, Kazakhstan,³Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan,
e-mail: tmazakov@mail.ru

The aim of this study is to determine the parameters of a mathematical model that describes debris flow breaches through hydraulic structures, such as dams and embankments. Achieving this goal will allow the developed model to be correlated with real observations and data. The importance of the research is underscored by the increasing frequency and intensity of catastrophic floods caused by the failure of such structures, emphasizing the need to develop effective methods for predicting and preventing such incidents. The methods and approaches proposed in this work hold significant practical value for assessing potential risks, organizing evacuation measures, and reducing the damage from accidents related to dam and embankment failures.

Keywords: hydraulic structures (HS), parameters, identification, dam breach, debris flow, mathematical modeling.

Введение. За последнее столетие зарегистрировано более тысячи разрушений гидротехнических сооружений по всему миру, где основными причинами выступают как природные, так и антропогенные факторы. Среди основных факторов аварий на ГТС [1] выделяются:

- прохождение экстремальных объемов воды, что может вызвать переполнение водохранилища и нарушить нормальную работу сбросных сооружений, приводя к переливу через гребень плотины и формированию прорыва;
- износ основных компонентов плотин и гидромеханического оборудования вследствие длительной эксплуатации, что создает риск возникновения прорывов;
- ошибки персонала, недостаток мониторинга опасных ситуаций и недостаточные прогнозные данные по паводкам;
- террористические акты, направленные на разрушение плотин.

Примеры значимых происшествий:

1. В Италии, в 1963 году, прорыв дамбы Вайонт был вызван оползнем объемом около 260 млн куб. метров, который обрушился в водохранилище, вызвав перелив и уничтожение нескольких деревень, погибло около 2000 человек.
2. В Китае, прорыв дамбы Банкиао в 1975 году, спровоцированный чрезмерными осадками, привёл к гибели более 170 000 человек, а миллионы остались без жилья.
3. Аварии в Бразилии на хвостохранилищах горнодобывающих предприятий, включая прорыв дамбы в 2019 году в Брумадинью, вызвали масштабные экологические катастрофы и многочисленные жертвы.

Кроме того, техногенная катастрофа на Саяно-Шушенской ГЭС в России, произошедшая 17 августа 2009 года, привела к гибели 75 человек и нанесению серьезного ущерба объекту. Прорыв дамбы в селе Кызылагаш Алматинской области в 2010 году также привел к человеческим жертвам и разрушениям.

Математические модели селевых потоков служат важным инструментом для анализа и прогнозирования этих сложных и разрушительных природных явлений. Селевые потоки представляют собой массу воды, грунта и камней, которая перемещается под действием гравитации по склонам и руслам рек, требуя тщательного анализа и моделирования.

Основные подходы к моделированию селевых потоков:

1. Эмпирические модели, опирающиеся на статистические данные прошлых событий.
2. Физические модели, воссоздаваемые в лабораторных условиях для изучения поведения селевых потоков.
3. Численные модели, использующие уравнения гидродинамики и механики грунтов.

Применение математического моделирования позволяет:

1. Оценивать риски и уязвимость:
 - Определение зон потенциального воздействия селевых потоков.
 - Использование при планировании территорий и разработке мер по снижению рисков.
2. Проектировать инженерные сооружения:
 - Поддержка при проектировании дамб, каналов и барьеров.

- Оценка эффективности защитных сооружений.
3. Создавать системы раннего предупреждения:
- Интеграция моделей с метеорологическими данными для прогнозирования селевых потоков.
 - Обеспечение своевременного оповещения населения и служб реагирования.

Примеры математических моделей для анализа селевых потоков и оползней [2-3]:

1) Модель *DEBRIS-2D*

DEBRIS-2D — это специализированная двумерная численная модель, предназначенная для симуляции движения селевых потоков и грязекаменных лавин по сложному рельефу местности. Она позволяет анализировать динамику селевых масс с учётом их реологических характеристик и взаимодействия с топографией. Модель учитывает различные реологические подходы, такие как модели Бингема, Гершеля-Балкли и турбулентного потока, что помогает описывать неньютоновские свойства селевых потоков, включая зависимость вязкости от напряжения сдвига.

DEBRIS-2D использует высокоточные цифровые модели рельефа (DEM), что обеспечивает детальное представление поверхности и точное прогнозирование путей движения потоков. Модель решает двумерные уравнения глубинно-усредненного потока с использованием методов конечных объемов или конечных разностей, что позволяет эффективно моделировать нестационарные процессы. Она применяется для определения вероятных маршрутов распространения селевых потоков и зон повышенного риска, а также при планировании мер по снижению рисков, эвакуации и размещению защитных сооружений.

2) Модель *FLO-2D*

FLO-2D — двумерная гидродинамическая модель, предназначенная для моделирования поверхностного течения жидкости на обширных территориях. Изначально разработанная для прогнозирования паводков, модель *FLO-2D* была адаптирована для симуляции селевых потоков, лахаров и других гидрологических явлений с учётом неньютоновских свойств. Модель решает

полные уравнения мелкой воды без упрощений, что позволяет учитывать сложные потоки с переменными скоростями и направлениями. Она использует квадратную расчётную сетку, что упрощает моделирование и повышает его эффективность при обработке больших объемов данных.

FLO-2D поддерживает различные реологические модели для вязкопластичных материалов, таких как селевые потоки, и учитывает влияние концентрации частиц и вязкости на движение потока. Модель совместима с ГИС, что облегчает подготовку данных и анализ результатов. *FLO-2D* широко используется для прогнозирования распространения паводковых вод, оценки риска затопления и моделирования высококонцентрированных смесей воды и твёрдых частиц, характерных для селевых потоков. Она также применяется при проектировании гидротехнических сооружений, таких как дамбы и каналы.

3) Модель *DAN (Динамический анализ оползней)*

DAN (Dynamic Analysis of Landslides) — одномерная численная модель, разработанная для анализа быстродвижущихся оползней, селевых потоков и обвалов. Эта модель ориентирована на анализ глубинно-усредненного движения массы вдоль заданной траектории с учётом изменения реологических характеристик материала в процессе движения.

DAN поддерживает несколько реологических моделей, таких как:

- **Модель сухого трения** — используется для материалов, у которых сопротивление движению пропорционально нормальному напряжению;
- **Модель Бингема** — учитывает начальное напряжение сдвига и постоянную вязкость;
- **Модель Гершеля-Балкли** — обобщает модель Бингема, вводя показатель степени для напряжения сдвига;
- **Модель Воеллми** — сочетает сухое трение и турбулентное сопротивление, часто применяемая для снежных лавин и обвалов.

Модель *DAN* позволяет изменять реологические параметры по траектории движения, учи-

тывая процессы разжижения или уплотнения материала. Она помогает прогнозировать дальность, скорость и время прибытия оползневых масс, а также оценивает потенциальный ущерб зданиям, дорогам и другим объектам. Модель активно используется в планировании защитных инженерных мер и разработке систем раннего предупреждения.

Материалы и методы. Хотя все упомянутые модели описываются уравнениями в частных производных, в работе [4] был предложен алгоритм, позволяющий свести их к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. После того как структура математической модели определена (т.е. задан вид уравнений с неуточнёнными параметрами), встает задача параметрической идентификации — нахождения численных значений параметров на основе известных входных и выходных данных.

Ввиду сложности моделируемого объекта применимы лишь пассивные методы идентификации, предполагающие использование данных, полученных в процессе нормального функционирования объекта.

Рассмотрим следующую математическую модель, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y = f(y, p, t), \quad (1)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

Здесь y – n_y -мерный вектор состояния модели, p – n_p -мерный вектор параметров.

В качестве меры близости системы и модели выберем функционал:

$$S = \sum_{m=1}^{n_y} \sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^n (\hat{y}_m^j(t_i) - y_m^j(t_i))^2, \quad (3) \quad \text{где}$$

где $y_m^j(t_i)$ – значение выходного сигнала y_m в момент времени t_i в год j , полученное с использованием математической модели.

Таким образом, задача параметрической идентификации сводится к задаче минимизации функционала S по параметрам p :

$$\min_{p \in P} S \quad (4)$$

где P – пространство допустимых значений параметров p .

Метод квазилинеаризации, предложенный Беллманом и Калабой [5] для решения краевых задач нелинейных дифференциальных уравнений, может быть также использован для задачи параметрической идентификации при условии, что параметры постоянны. Этот метод характеризуется высокой степенью сходимости.

Результаты и обсуждение. Дополним систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1)-(2) приобретает следующий вид с добавлением уравнения:

$$p = O, \quad (5)$$

где p – параметры модели, подлежащие идентификации.

Введем обозначения: $z = (y, p)$, $\varphi(z, t) = (f(z, t), O)$, где z – вектор размерности – $nz = (n_y + n_p)$. Тогда систему дифференциальных уравнений (1) и (5) можно записать как:

$$z = \varphi(z, t) \quad (6)$$

Предположим, что k -я оценка вектора состояния $z^k(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ известна. Разлагая правую часть (6) в окрестности траектории $z^k(t)$, в ряд Тейлора и ограничиваясь линейной частью, получаем систему дифференциальных уравнений для $(k + 1)$ -го приближения вектора:

$$z^{k+1} = A^k(t)z^{k+1} + q^k(t) \quad (7)$$

$$A^k(t) = \frac{\partial \varphi(z^k, t)}{\partial z},$$

$$q^k(t) = \varphi(z^k, t) - A^k(t)z^k$$

Решение уравнения (7) имеет вид:

$$z^{k+1}(t) = \Phi^{k+1}(t)z^{k+1}(t_0) + g^k(t), \quad (8)$$

$$t \in [t_0, t_1].$$

где $z^{k+1}(t)$ - является решением следующей матричной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\Phi}^{k+1} = A^k(t)\Phi^{k+1}, \quad \Phi^{k+1}(t_0) = E, \quad (9)$$

а $g^k(t)$ – решением неоднородного дифференциального уравнения:

$$\dot{g}^{k+1} = A^k(t)g^{k+1} + q^k, \quad g(t_0) = O \quad (10)$$

Здесь E – единичная матрица.

$$S^{k+1} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^n \left(\hat{y}^j(t_i) - \Phi_1^{k+1}(t_i)\hat{y}^j(t_0) - \Phi_2^{k+1}(t_i)p^{k+1} - g^k(t_i) \right) \cdot \left(\hat{y}^j(t_i) - \Phi_1^{k+1}(t_i)\hat{y}^j(t_0) - \Phi_2^{k+1}(t_i)p^{k+1} - g^k(t_i) \right) \quad (12)$$

Приравняем к нулю частные производные от S^{k+1} по p^{k+1} :

$$\sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^n \left(\Phi_2^{k+1}(t_i)\Phi_2^{k+1}(t_i) \right) p^{k+1} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^n \Phi_2^{k+1}(t_i) \cdot \left(\hat{y}^j(t_i) - \Phi_1^{k+1}(t_i)\hat{y}^j(t_0) - g^k(t_i) \right) \quad (13)$$

которую решим методом Гаусса для определения p^{k+1} . Это позволит найти траекторию $z^{k+1}(t)$, на интервале $t \in [t_0, t_1]$, тем самым определяя $(k + 1)$ -ю оценку вектора состояния z . Процесс продолжается, пока очередные оценки p^k и p^{k+1} не станут близки по заданному критерию.

Таким образом, алгоритм идентификации на основе квазилинеаризации можно представить следующим образом:

Шаг 1. Задаем начальные значения p^0 , иници-

Разобьем матрицу Φ^{k+1} на блочные матрицы:

$$\Phi^{k+1} = \begin{pmatrix} \Phi_1^{k+1} & \Phi_2^{k+1} \\ \Phi_3^{k+1} & \Phi_4^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Подставим решение (8) в функционал (3):

$$S^{k+1} = \sum_{m=1}^{ny} \sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^n \left(\hat{y}_m^j(t_i) - z_m^{k+1j}(t_i) \right), \quad (11)$$

где $z_m^{k+1j}(t_i)$ – значение $(k + 1)$ -го приближения выходного сигнала z_m в момент времени t_i , для года j . С учётом обозначений:

$$z_m^{k+1j}(t_0) = \hat{y}_m^j(t_0), \text{ для } m=\overline{1, ny} \text{ и } \forall k, j,$$

$$z_m^{k+1j}(t_0) = p^{k+1}, \text{ для } m=\overline{ny+1, nz} \text{ и } \forall k, j,$$

получим следующий функционал, зависящий от неизвестных p^{k+1} :

ализируем $k = 0$.

Шаг 2. Для определения k -го приближения $z^k(t)$ интегрируем систему:

$$\dot{z}^k = \varphi(z^k, u, t)$$

при начальных условиях

$$z_m^k(t_0) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \hat{y}_m^j(t_0), \text{ для } m=\overline{1, ny},$$

$$z_m^k(t_0) = p^k, \text{ для } m=\overline{ny+1, nz}.$$

Шаг 3. Решаем задачи Коши (9) и (10).

Шаг 4. Для получения $(k + 1)$ -й оценки параметров p решаем систему линейных алгебраических уравнений (13).

Шаг 5. Если $|p^{k+1} - p^k| < \varepsilon_0$, процесс идентификации завершается; иначе — возврат к шагу 2 (где ε_0 – требуемая точность).

Таким образом, математические модели для анализа угроз прорыва дамб обеспечивают безопасность гидротехнических объектов и позволяют: прогнозировать последствия возможных аварий, разрабатывать меры для снижения рисков и повышать осведомлённость населения к ЧС. Развитие вычислительных технологий и интеграция с геоинформационными системами делают модели более точными, хотя их результативность зависит от качества исходных данных и опыта специалистов.

Предложенный алгоритм реализован программно и проходит экспериментальные расчёты.

Выводы. Модели DEBRIS-2D, FLO-2D и DAN представляют собой ключевые инструменты в геотехническом и гидрологическом моделировании опасных природных процессов. Их использование позволяет: а) углубленно изучить механизмы движения селевых потоков и оползней; б) точно прогнозировать зоны потенциального воздействия и пути распространения опасных потоков; в) разрабатывать эффективные стратегии управления рисками и планирования территорий. Выбор конкретной модели определяется спецификой задачи, доступными данными и уровнем детализации, необходимым для анализа. Интеграция результатов моделирования

с практическими мерами по снижению рисков способствует повышению уровня безопасности населения и устойчивости инфраструктуры перед воздействием опасных геологических процессов.

В данной работе разработана схема идентификации параметров моделей, позволяющая адаптировать их к конкретным водоемам. Этот алгоритм предоставляет возможность более точного моделирования процессов разрушения плотин и распространения селевых волн, что является важным аспектом для предотвращения катастрофических наводнений. Результаты численных расчетов показывают, что предложенная схема эффективно применяется для идентификации параметров выбранных математических моделей. Программное обеспечение, реализующее данный алгоритм, демонстрирует высокую точность и надежность расчетов, что подтверждается сравнением с существующими моделями и экспериментальными данными.

Перспективы дальнейших исследований связаны с интеграцией разработанной схемы идентификации параметров моделей с современными системами мониторинга и предупреждения о чрезвычайных ситуациях. Это позволит повысить эффективность мер по защите населения и инфраструктуры от последствий селевых прорывов и других гидрологических угроз.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан в рамках гранта AP19678157 «Разработка программно-аппаратного комплекса мониторинга состояния уровня заполняемости водоёма» (2023-2025)

Литература

1. Стихийные бедствия и техногенные катастрофы: Превентивные меры/ The World Bank and The United Nations; пер. с англ.-М.: Альпина Паблишер.-2011.-312 с. ISBN 978-5-9614-1527-8
2. Francesca Aureli, Paolo Mignosa, Massimo Tomirotti. Numerical simulation and experimental verification of Dam-Break flows with shocks//Journal of Hydraulic Research.-2010.-Vol.2000(3).-P.197-206. DOI 10.1080/00221680009498337
3. Tomaž Podobnikar Methods for visual quality assessment of a digital terrain model// S.A.P.I.EN.S

Surveys and Perspectives Integrating Environment and Society, Special issue /-2009.-Vol.2(2).-P.1-10.
URL <http://journals.openedition.org/sapiens/738>

4. Mazakova A.T., Jomartova Sh.A., Mazakov T.Zh., Ziyatbekova G.Z., Begaliyeva K.B.

Digital Determination of the Thermal Conductivity of a Square Bar by Reduction to a System of Integral Equations//Ecological Footprint of the Modern Economy and the ways to Reduce it Advances in Science, Technology&Innovation.-2024.-P.167-171.

DOI:10.1007/978-3-031-49711-7_29

5. Гроп Д. Методы идентификации систем.// Перевод с англ. В.А. Васильева, В.И. Лопатина. - Под ред. Е.И. Кринецкого М.: Мир, 1979. – 302 с.

References

1.Stihijnye bedstviya i tehnogennye katastrofy: Preventivnye mery/ The World Bank and The United Nations; per. s angl.-M.: Al' pina Pablisher.-2011.-312 s.

ISBN 978-5-9614-1527-8. [in Russian]

2. Francesca Aureli, Paolo Mignosa, Massimo Tomirotti. Numerical simulation and experimental verification of Dam-Break flows with shocks//Journal of Hydraulic Research.-2010.-Vol.2000(3).-P.197-206. DOI 10.1080/00221680009498337

3. Tomaž Podobnikar Methods for visual quality assessment of a digital terrain model// S.A.P.I.EN.S Surveys and Perspectives Integrating Environment and Society, Special issue /-2009.-Vol.2(2).-P.1-10. URL <http://journals.openedition.org/sapiens/738>

4. Mazakova A.T., Jomartova Sh.A., Mazakov T.Zh., Ziyatbekova G.Z., Begaliyeva K.B.

Digital Determination of the Thermal Conductivity of a Square Bar by Reduction to a System of Integral Equations//Ecological Footprint of the Modern Economy and the ways to Reduce it Advances in Science, Technology&Innovation.-2024.-P.167-171.

DOI:10.1007/978-3-031-49711-7_29

5. Grop D. Metody identifikacii sistem.// Perevod s angl. V.A. Vasil' eva, V.I. Lopatina. - Pod red. E.I. Krineckogo M.: Mir, 1979.- 302 s. [in Russian]

Сведение об авторах

Мазаков Т.Ж.-доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный университетим. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, e-mail: tmazakov@mail.ru;

Джомартова Ш.А. - доктор технических наук, доцент, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, e-mail: jomartova@mail.ru;

Мазакова А.Т. – докторант Казахского национального университета им.аль-Фараби, e-mail: aigerym97@mail.ru;

Тойкенов Г.Ч. - кандидат физико-математических наук, доцент, Казахский национальный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан, e-mail: gumyrbektoike@mail.ru;

Алиаскар М.С. - докторант Казахского национального университета им.аль-Фараби, Алматы, Казахстан, e-mail: m.alyasqar@gmail.ru;

Тойкенова У.Г.- докторант Казахского национального женского педагогического университета, Алматы, Казахстан, e-mail: ulpantoikenova@gmail.com

Information about the authors

Mazakov T.Zh. – Doctor of Physical and mathematical sciences, professor, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: tmazakov@mail.ru;

Jomartova Sh.A. - Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: jomartova@mail.ru;

Mazakova A.T. - PhD student of the Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: aigerym97@mail.ru;
Tokenov G.Ch. - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: gumyrbektoike@mail.ru;
M.S. Aliaskar - PhD student of the Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: m.alyasqar@gmail.ru;
Toikenova U.G. - PhD student of the Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: ulpantoikenova@gmail.com