

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫПЕЧКИ ХЛЕБОБУЛОЧНОЙ ПРОДУКЦИИ

¹Т.Т. Дузбаев^{ORCID}, ^{1,2}Т.Ж. Мазаков^{ORCID}, ¹Д.О. Байжанова^{ORCID}, ¹Ш.А. Джомартова^{ORCID}, ¹А.Т. Мазакова^{ORCID},
¹Б.С. Амирханов^{ORCID}, ¹Г.А. Амирханова^{ORCID}, ³А.С. Тыныкулова^{ORCID}

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,

²Международный инженерно-технологический университет, Алматы, Казахстан,

³Международный университет, Астана, Казахстан

✉ Корреспондент-автор: talgat.duzbaev@mail.ru

Современная цивилизация переживает стремительный рост вычислительных мощностей и повсеместное внедрение цифровых технологий. На этом фоне роботы, интеллектуальные устройства и программные комплексы на базе ИИ становятся ключевыми инструментами не только в быту и промышленности, но и в научных исследованиях. Информатизация активно охватывает и пищевую отрасль: исторически эмпирическая по подходам, она накопила обширные экспериментальные данные, анализ которых сегодня невозможен без методов компьютерного моделирования.

В работе рассматривается управляемость многостадийного процесса изготовления хлебобулочной продукции. Показано, что математическое моделирование способно заменить дорогостоящие и потенциально рискованные эксперименты, а также дает критерий управляемости, реализованный программно.

Ключевые слова: кинетика, математическая модель, пищевая промышленность, управление, хлебобулочная продукция.

НАН-ТОҚАШ ӨНІМДЕРІН ПІСІРУ ПРОЦЕСІН МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

¹Т.Т. Дузбаев, ^{1,2}Т.Ж. Мазаков^{ORCID}, ¹Д.О. Байжанова, ¹Ш.А. Джомартова, ¹А.Т. Мазакова,
¹Б.С. Амирханов, ¹Г.А. Амирханова, ³А.С. Тыныкулова

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан,

²Халықаралық инженерлік-технологиялық университет, Алматы, Қазақстан,

³Астана халықаралық университеті, Астана, Қазақстан,
e-mail: talgat.duzbaev@mail.ru

Қазіргі өркениет есептеу қуатының қарқынды өсуі мен цифрлық технологиялардың кеңінен енгізілу кезеңін бастан өткеріп отыр. Осы жағдайда роботтар, интеллектуалды құрылғылар және жасанды интеллект негізіндегі бағдарламалық кешендер тек тұрмыста және өндірісте ғана емес, ғылыми зерттеулерде де негізгі құралдарға айналууда. Ақпараттандыру үдерісі тамақ өнеркәсібін де белсенді түрде қамтып келеді: тарихи тұрғыдан эмпирикалық әдістерге сүйенген бұл салада жиналған мол тәжірибелік деректерді бүгінгі таңда компьютерлік модельдеу әдістерінсіз талдау мүмкін емес.

Бұл жұмыста нан-тоқаш өнімдерін өндірудің көпсатылы процесін басқару мәселесі қарастырылған. Математикалық модельдеу қымбат әрі тәуекелі жоғары эксперименттердің орнын баса алатыны және басқарылу критерийін бағдарламалық түрде іске асыруға мүмкіндік беретіні көрсетілген.

Түйін сөздер: кинетика, математикалық модель, тамақ өнеркәсібі, басқару, нан-тоқаш өнімдері, технологиялық процесс, оңтайландыру, сандық модельдеу.

MATHEMATICAL MODELING OF THE BAKING PROCESS IN BREAD AND BAKERY PRODUCTION

¹T.T. Duzbaev, ^{1,2}T.Zh. Mazakov^{ORCID}, ¹D.O. Baizhanova, ¹Sh.A. Dzhomartova, ¹A.T. Mazakova,
¹B.S. Amirkhanov, ¹G.A. Amirkhanova, ³A.S. Tynykulova

¹al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,²Engineering Technological University, Almaty, Kazakhstan,³Astana International University, Astana, Kazakhstan,
e-mail: talgat.duzbaev@mail.ru

Modern civilization is experiencing a rapid increase in computational power and the widespread adoption of digital technologies. Against this background, robots, intelligent devices, and AI-based software systems are becoming key tools not only in everyday life and industry but also in scientific research. Informatization is actively transforming the food industry as well: historically empirical in its approaches, it has accumulated a large amount of experimental data, the analysis of which today is impossible without computer modeling methods.

This paper examines the controllability of the multistage process of bakery production. It is shown that mathematical modeling can replace costly and potentially risky experiments and also provides a controllability criterion implemented in software form.

Keywords: kinetics, mathematical model, food industry, process control, bakery products, technological process, optimization, digital modeling

Введение. Статья посвящена моделированию процессов хлебопечения, описываемых нелинейными ОДУ, характерными для широкого класса систем со сложной динамикой. За последние годы значительно развилась теория управления химико-технологическими процессами и реакторами: моделирование ускоряет разработку новых технологий, помогает выявлять области устойчивых или неустойчивых режимов и подбирать оптимальные управляющие параметры [1].

В практических постановках применяют ОДУ для систем с сосредоточенными параметрами (например, аппараты идеального вытеснения) и уравнения в частных производных для систем с распределёнными параметрами (в частности, кинетика реакций и диффузионный массоперенос) [2].

Технологический цикл хлебобулочного производства включает стадии: 1) расход сырья; 2) замес и брожение; 3) разделка; 4) выпечка; 5) выпуск готовой продукции.

Материалы и методы. В статье рассматривается математическая модель многостадийного процесса изготовления хлебобулочной продукции, которая описывается системой ОДУ и характеризуется следующими параметрами в момент времени t [3-6]: $x_1(t)$ - количество сырья; $x_2(t)$ - количество замешанного теста, находящегося в стадии брожения; $x_3(t)$ - количество те-

ста в стадии разделки; $x_4(t)$ - количество изделий в стадии выпекания; $x_5(t)$ - количество готовой продукции в момент времени t .

Переходы между стадиями характеризуются интенсивностями $k_i(u)$, $i = \overline{1, 4}$, зависящими от температуры $u(t)$, которая рассматривается как управляющее воздействие.

Введем следующие обозначения: $t_0=0$ - момент времени соответствует началу выпечки, T - время окончания выпечки.

Связь между введенными выше параметрами удовлетворяет следующей системе ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -k_1(u)x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= k_1(u)x_1 - k_2(u)x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= k_2(u)x_2 - k_3(u)x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= k_3(u)x_3 - k_4(u)x_4, \\ \frac{dx_5}{dt} &= k_4(u)x_4, \\ 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (1)$$

Для исследования динамики хлебобулочного изготовления примем следующие предположения, которые удовлетворяют естественным ограничениям: 1) температура неотрицательна и не может превышать предельно допустимого значения $u_{\max}$ и 2) начальный запас сырья также неотрицателен и не может превышать возможностей склада $p_{\max}$.

Задание определённого режима протекания

технологического процесса позволяет целенаправленно влиять на его кинетику, а также на количественные и качественные характеристики конечного продукта. Управление параметрами процесса, в частности температурой, представляет собой один из ключевых факторов обеспечения его эффективности и стабильности. Температурный режим определяет скорость химических реакций, энергетические затраты и степень преобразования исходных веществ, что делает данный параметр важнейшей управляемой величиной в системе регулирования технологического процесса.

В дальнейшем будем рассматривать случай, при котором температура рассматривается как функция времени и обозначается $u(t)$. Такой подход позволяет учитывать динамический характер процесса и исследовать влияние временных колебаний температуры на кинетические характеристики реакции. Следует отметить, что для любого технологического процесса существует ограниченный диапазон допустимых температурных значений. Абсолютная температура не может опускаться ниже нуля, что обусловлено фундаментальными законами термодинамики. Верхняя граница температурного диапазона определяется технологическими и конструктивными параметрами реактора, включая пределы термостойкости материалов, особенности теплообмена и условия безопасной эксплуатации оборудования.

Таким образом, регулирование температуры в пределах допустимого диапазона является важнейшей задачей оптимизации технологического процесса. Корректный выбор температурного профиля обеспечивает достижение максимальной производительности системы при сохранении её устойчивости, надёжности и энергоэффективности.

Предполагается в момент начала процесса выпекания: 1) нулевая концентрация промежуточного и конечного продуктов и 2) максимальная концентрация исходного сырья. Сделанное предположение в математической формулировке записывается в следующем виде

$$x_1(0) = p, \quad x_i(0) = 0, \quad i = \overline{2, 5}, \quad (2)$$

где p - имеющийся запас сырья

$$p \in P = \{p | 0 \leq p \leq p_{\max}\}$$

Сделанное ранее предположение, что температура в рабочей области аппарата не может быть отрицательной и превосходить некоторого предельного значения, в математической формулировке выглядит следующим образом

$$u \in U = \{u | 0 \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad \forall t \in [0, T]\} \quad (3)$$

Математическая формулировка задачи (возможен ли выпуск требуемого количества хлебобулочной продукции z за время T , при ограничениях (2) - (3)) имеет вид

$$x_5(T) = z \quad (4)$$

На математическом языке поставленная задача формулируется следующим образом: существует ли управление $u(t)$, удовлетворяющее условию (3), и переводящее систему (1) за требуемое время T из начального состояния (2) в желаемое состояние (4).

Обсуждение и результаты. Численное решение задач при конкретных исходных данных.

Для решения поставленной задачи введем следующие обозначения:

$$n = 5; \quad x = (x_1, \dots, x_n); \quad x_0 = (p, 0, \dots, 0), \quad c = (0, \dots, 0, 1),$$

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} -k_1(u)x_1 \\ k_1(u)x_1 - k_2(u)x_2 \\ k_2(u)x_2 - k_3(u)x_3 \\ k_3(u)x_3 - k_4(u)x_4 \\ k_4(u)x_4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Здесь x, x_0, c - n -мерные векторы, $f(x, u)$ - n -мерная вектор функция.

Тогда перепишем поставленную задачу в общем виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (6)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0 \quad (7)$$

и конечными условиями в момент времени T

$$Cx(T) = z \quad (8)$$

Вектор-функцию (5) перепишем в виде

$$f(x, u) = A(u)x, \quad (9)$$

где элементы $n \times n$ -матрицы $A(u)$ зависят от управления u :

$$A(u) = \begin{pmatrix} -k_1(u) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1(u) & -k_2(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2(u) & -k_3(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3(u) & -k_4(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4(u) & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Теперь исходная система (6) описывается линейными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = A(u)x \quad (10)$$

Решение системы уравнений (10)-(7) запишем в виде интегрального уравнения:

$$x(t, u, p) = x_0 + \int_0^t A(u) * x(\tau, u, p) d\tau, \quad (11)$$

$$t \in [0, T], u \in U, p \in P$$

Введем обозначения $y(t) = x(t, u, p)$, $f(t) = x_0$, $\mu = 1$, $K(t, \tau) = A(u)$. Тогда уравнение (11) можно записать следующим образом

$$y(t) = f(t) + \mu \int_0^t K(t, \tau) * y(\tau) d\tau \quad (12)$$

Уравнение (12) носит название интегрального уравнения Вольтерра второго рода [7, 8].

Теорема 1. Уравнение (11) имеет единственное непрерывное решение при заданных фиксированных значениях параметров $u \in U$, $p \in P$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство. Т.к. матрица $A(u)$ и вектор начальных условий x_0 при фиксированных значениях параметров u, p являются постоянными, то тем самым выполнены все условия теоремы 1 [7]. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы.

Введем оператор Вольтерра

$$By(t) = \int_0^t K(t, \tau) * y(\tau) d\tau \quad (13)$$

Определим повторные ядра оператора Вольтерра следующим образом:

$$B^m y(t) = \int_0^t K_m(t, \tau) * y(\tau) d\tau$$

$$K_m(t, s) = \int_s^t K(t, \tau) K_m(\tau, s) d\tau \quad (14)$$

$$R(t, s) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t, s)$$

Пусть $M = \sup_{0 \leq t, s \leq T} |K(t, s)|$. Тогда для повторных ядер справедливо

$$|K_m(t, s)| \leq \frac{M^m * (t - 1)^m}{(n - 1)!}$$

Решение уравнения (12) можно записать в следующем виде

$$y(t) = f(t) + \int_0^t R(t, \tau) * f(\tau) d\tau \quad (15)$$

Далее, в силу независимости матрицы $A(u)$ от времени, подставляя $x(t, u, p)$ вместо $y(t)$ из уравнения (15), получим

$$x(t, u, p) = \left(E + A(u) * t + \frac{1}{2} A(u)^2 * t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A(u)^k * t^k + \dots \right) * x_0 \quad (16)$$

Для достаточно больших k величина $\frac{1}{k!} \|A(u)^k * t^k\|$ становится малой и $x(t, u, p)$ с требуемой точностью можно записать в виде

$$x(t, u, p) = \left(E + A(u) * t + \frac{1}{2} A(u)^2 * t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A(u)^k * t^k \right) * x_0 \quad (17)$$

Теорема 2. Для $\forall \varepsilon \geq 0$ Эномер r , такой что для $\forall k > r$ имеет место неравенство $\frac{1}{k!} \|A(u)^k * t^k\| \leq \varepsilon$.

Доказательство. Обозначим через $a = T * \|A(u)\|$, $a_k = \frac{1}{k!} a^k$. Далее рассмотрим ряд $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}$. Вычислим $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$. В силу введенных обозначений $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a}{k+1} = 0$. Рассмотренный ряд является сходящимся, т.к. $\rho \leq 1$. Известно, что для любого $\varepsilon \geq 0$ существует номер r , такой что для всех $k > r$ справедливо $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \rho + \varepsilon$ [9]

Тогда в качестве r можно выбрать $r = \left\lceil \frac{a}{\varepsilon} \right\rceil$ - целую часть от деления. Справедливость утверждения теоремы доказана.

Теорема 3. Система (6)-(8) управляема если для заданных конечных условий z и времени T существуют параметры $u \in U$, $p \in P$ такие, что выполняется равенство $Sx(T) = z$.

Доказательство основано на подходе, опубликованном в работе [3]

Выводы. В статье исследована математическая модель многостадийного процесса изготов-

ления хлебобулочной продукции, описываемая ОДУ.

Для интегрального уравнения Вольтерра второго рода, к которому сводится исходная модель, получен аналитический вид решения.

Получен критерий управляемости, который определяет взаимосвязь между температурой, наличием количества сырья в начальный момент, временем выпечки и выпуском требуемого количества хлебобулочной продукции.

Практическая ценность работы состоит в том, что разработанные в ней технология и алгоритмы позволяют решить проблему управляемости объектов различной природы и могут быть применены для исследования электроэнергетических, робототехнических систем и т.д.

Финансирование. Статья опубликована при поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, в рамках проекта программно-целевого финансирования BR24992975 "Разработка цифрового двойника предприятия пищевой промышленности с применением искусственного интеллекта и технологий ИИТ", 2024-2026 гг.

Литература

1. Соловьев М.Е., Соловьев М.М. Компьютерная химия. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. - 536 с. ISBN 5-98003-188-X.
2. Бакин И.А. Интенсификация процессов смешивания при получении комбинированных продуктов в аппаратах центробежного типа. Автореф. дис. доктор.тех.наук: 05.18.12.- Кемерово, 2009. - 34 с.
3. Мазакова Ә.Т., Шаймерден Б.О., Сейлхан Б.Ж., Мазаков Т.Ж., Джомартова Ш.А. Химиялық реакторды басқару туралы // Материалы VII междунар. научно-практ. конф. «Информатика и прикладная математика».2022, с.14-18. ISBN 978-601-332-384-8.
4. Орлов Ю.Н., Соков С.А. Процессы и аппараты в химической технологии и биотехнологии. Практикум. - Тольятти: ТГУ, 2021 - 95 с. ISBN 978-5-8259-1514-2.

5. Антипов С.Т., Кретов И.Т. и др. Машины и аппараты пищевых производств. - М.:Высшая Школа, 2019. - 703с. ISBN 5-06-004168-9.
6. Медведков Е.Б. и др. Процессы и аппараты пищевых производств.- Алматы: Гылым, 2016. - 360с. ISBN 978-601-7053-52-9.
7. Сетуа А.В. Метод интегральных уравнений в математической физике. - М.: МГУ, 2023. -316 с. ISBN 978-5-19-011911-4.
8. Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения. - Киев: Наукова Думка, 2002. - 344 с. ISBN 966-96058-7-3.
9. Кадец В.М. Курс функционального анализа.-Харьков: ХНУ,2006.- 616с.ISBN 966-623-199-9.
10. OpenAI. ChatGPT (GPT-4) Language Model.- OpenAI.-2023.-URL: <https://chat.openai.com>. - accessed: 01.11.2025.

References

1. Solov' ev M.E., Solov' ev M.M. Komp' juternaja himija. - M.: SOLON-Press, 2005. - 536 s. ISBN 5-98003-188-X. [in Russian]
2. Bakin I.A. Intensifikacija processov smeshivaniya pri poluchenii kombinirovannyh produktov v apparatah centrobezhnogo tipa. Avtoref.dis. doktor.teh.nauk: 05.18.12.- Kemerovo, 2009. - 34 s. [in Russian]
3. Mazaқova Ә.Т., Shajmerden B.O., Sejlhan B.Zh., Mazakov T.Zh., Dzhomartova Sh.A. Himijalyқ reaktordy basқaru turaly // Materialy VII mezhdunar. nauchno-prakt. konf. «Informatika i prikladnaja matematika».2022, s.14-18. ISBN 978-601-332-384-8. [in Russian]
4. Orlov Ju.N., Sokov S.A. Processy i apparaty v himicheskoj tehnologii i biotehnologii. Praktikum. - Tol' jatti: TGU, 2021 - 95 s. ISBN 978-5-8259-1514-2. [in Russian]
5. Antipov S.T., Kretov I.T. i dr. Mashiny i apparaty pishhevyh proizvodstv. - M.:Vysshaja Shkola, 2019. - 703s. ISBN 5-06-004168-9. [in Russian]
6. Medvedkov E.B. i dr. Processy i apparaty pishhevyh proizvodstv.- Almaty: Gylym, 2016. - 360s. ISBN 978-601-7053-52-9. [in Russian]
7. Setuha A.V. Metod integral' nyh uravnenij v matematicheskoy fizike. - M.: MGU, 2023. -316 s. ISBN 978-5-19-011911-4. [in Russian]
8. Dovgij S.A., Lifanov I.K. Metody resheniya integral' nyh uravnenij. Teorija i prilozhenija. - Kiev: Naukova Dumka, 2002. - 344 s. ISBN 966-96058-7-3. [in Russian]
9. Kadec V.M. Kurs funkcional' ного analiza.-Har' kov:HNU, 2006. - 616s. ISBN 966-623-199-9.
10. OpenAI. ChatGPT (GPT-4) Language Model.- OpenAI.-2023.-URL: <https://chat.openai.com>. - accessed: 01.11.2025.

Сведения об авторах

Дузбаев Т.Т.- преподаватель КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан, e-mail: talgat.duzbaev@mail.ru;

Мазаков Т. Ж. - д.ф.-м.н., профессор МИТУ, Алматы, Казахстан, e-mail: tmazakov@mail.ru;

Байжанова Д.О.- старший преподаватель КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан, e-mail: dina.baizhanova2024@gmail.com;

Джомартова Ш. А. -д.т.н., профессор КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, e-mail: jomartova@mail.ru;

Мазакова А.Т. - PhD, старший преподаватель КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, e-mail: aigerym97@mail.ru;

Амирханов Б. С.-научный сотрудник КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан, e-mail: amirkhanov.b@gmail.com;

Амирханова Г.А. - PhD, старший преподаватель КазНУ им.аль-Фараби, Алматы, Казахстан, e-mail: gulshat.aa@gmail.com;

Тыныкулова А. С. - старший преподаватель, Международный университет Астана, Казахстан, e-mail: asem_110981@mail.ru.

Information about the authors

Duzbaev T.T. - Lecturer, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: talgat.duzbaev@mail.ru;

Mazakov T. Zh.- Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, International Engineering and Technology University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: tmazakov@mail.ru;

Baizhanova D.O. -Senior Lecturer, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: dina.baizhanova2024@gmail.com;

Zhomartova Sh. A. - Doctor of Technical Sciences, Professor, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: jomartova@mail.ru;

Mazakova A.T. - PhD, Senior Lecturer, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: aigerym97@mail.ru;

Amirkhanov B.S. - Researcher, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: amirkhanov.b@gmail.com;

Amirkhanova G.A. -PhD, Senior Lecturer, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: gulshat.aa@gmail.com;

Tynykulova A.S.- Senior Lecturer, Astana International University, Astana, Kazakhstan, e-mail: asem_110981@mail.ru.